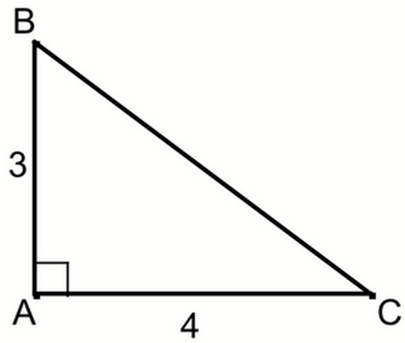
Exercice 1

Recopier la figure ci-contre où ABC est un triangle rectangle en A tels que :

AB = 3 et AC = 4



1°) Calculer BC

2°) Soit E le point du segment [AC] tel que AE = 3

La perpendiculaire à (AC) passante par E coupe [BC] en K

a) Vérifier que $\frac{CE}{CA} = \frac{CK}{CB} = \frac{EK}{AB}$

b) Calculer alors CK et EK

3°) Construire le point D tel que ABDK soit un parallélogramme

La droite (AK) coupe la droite (CD) en F

a) Vérifier que $\frac{CF}{CD} = \frac{CK}{CB}$

b) Montrer alors que (EF) // (AD)

c) En déduire que AD = 4 EF

Exercice 2

I/ On donne les réels suivants : $a = 9 - 4\sqrt{5}$ et $b = 9 + 4\sqrt{5}$

1°/ Montrer que a et b sont inverses.

2°/ Calculer alors l'expression $A = a^2b^3 - a^3b^2$

3°/ a- Développer $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ et $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$

b- Déduire $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

c- Monter que $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{5}}$ est un entier naturel.

II/ Soit x un nombre réel tel que $x \in [-1, 4]$.

1°/ Donner un encadrement de $2x+5$ et $(2x+5)^2$.

2°/ Déduire un encadrement de $4x^2 + 20x + 13$.

III/ Soit a un réel tel que $a > 1$, comparer $\frac{a^2+1}{a-1}$ et $a-1$.

Exercice 3

Choisir la réponse exacte :

1) $PGCD(2^{50}, 5^{20})$ égale à : a) 10 b) 1 c) 10^{20}

2) $|5\sqrt{6}-6\sqrt{5}|$ est égale à : a) $5\sqrt{6}-6\sqrt{5}$ b) 0 c) $6\sqrt{5}-5\sqrt{6}$

3) Si $x \in]-1,1[$ alors : a) $x^2 \in]0,1[$ b) $x^2 \in]0,+\infty[$ c) $x \in]1,+\infty[$

4) Soient x et y deux nombres réels. L'expression $\sqrt{(x-y)^2}$ est égale à :

a) $x-y$ b) $y-x$ c) $|x-y|$

Exercice 4

1) Pour n un entier naturel, on donne $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{n+14}}{\mathbf{n+2}}$
   a) Montrer que $\mathbf{A} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{n+2}}$
   b) En déduire les valeurs de n pour les quelles A est un entier naturel.
2) On suppose que n = 4
   a) Calculer la valeur numérique de A.
   b) En déduire que la somme de deux entiers consécutifs ajoutée A est divisible par 2.

Exercice 5

1) Factoriser les expressions suivantes :
   $A = 2x^3 - 16$; $B = 4x^2 - (1+x^2)^2$ et $C = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.
2) a) Simplifier:
   $E = \frac{A}{x^2+2x+4}$; $F = \frac{2C}{(x+2)^2}$ et $G = E - F$.
   b) Calculer B pour $x = \sqrt{5}$ puis pour $x = 1+\sqrt{5}$.

Exercice 6

Soient a et b deux réels vérifiant : $a^2 + b^2 = 1$.

a) Montrer que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2$.
b) Montrer que $a^6 + b^6 + 3a^2b^2 = 1$.

Série

Exercice 1

1) Développer $(a+b)^3$.

2) On suppose a et b positifs .Démontrer, en utilisant 1) que :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$$

Exercice 2

Soient a , b , c trois nombres réels.

1) Montrer que : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

2) Calculer $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ et en déduire que :

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$$

Quels sont les triplets $(a\ ,\ b\ ,\ c)$ pour lesquels l'inégalité précédente devient une égalité ?

3) Montrer que : $\dfrac{|a+b+c|}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Dans quel y a-t-il égalité ?

4) a , b , c sont maintenant 3 réels positifs. Montrer que :

$$\frac{1}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$$

Exercice 3

- Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$$

- Montrer que si x et y sont deux réels positifs alors $\dfrac{x+y}{1+x^2+y^2} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Montrer que si x et y sont deux réels tels que : $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$ alors :

$$\frac{1}{4+x+y+xy} \leq \frac{1}{3}$$